ΟΜΟΓΕΝΗΣ Γ.Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad , a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

πχ 1

$y'' - 3y' + 2y = 0$ εαν έχει λύση μορφής $e^{\lambda x}$

ΛΥΣΗ

$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda \cdot e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \quad , x \in \mathbb{R}$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}$

$\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$

Άρα, λύσεις είναι οι

$y_1(x) = e^{2x}$ και $y_2(x) = e^x \quad , x \in \mathbb{R}$

$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = -e^{3x} \neq 0$

ΒΣΛ $\to \{e^x, e^{2x}\}$ της εξίσωσης

πχ 2

$y'' - 2y' + y = 0$ εαν έχει λύση μορφής $e^{\lambda x}$

$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$(\lambda^2 - 2\lambda + 1) e^{\lambda x} = 0$

$\lambda = 1$ η πολλ/τας 2 (Η 2η λύση που είναι;;)

Θέτω $y = u \cdot e^x$

$u'' \cdot e^x + \cancel{2u' \cdot e^x} + \cancel{ue^x} - 2(\cancel{u'e^x} + \cancel{ue^x}) + \cancel{ue^x} = 0$

$u'' = 0 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$

Η πιο απλή μορφή της είναι η

$\boxed{u = x}$ άρα $y_2(x) = x \cdot e^x$

που y_1, y_2 γραμμ. ανεξάρτητες

αφού $W(y_1, y_2) = -e^{2x} \neq 0$

$y = c_1 y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ είναι διακεκριμένες ρίζες του Χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P(\lambda)$ με πολ/τες $m_1, \dots, m_s$ αντίστοιχα τότε οι συναρτήσεις

$$x^j \cdot e^{\lambda_k \cdot x}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad j = 0, \dots, m_s - 1$$

αποτελούν ένα ΒΣΛ της ομογενούς (E_0).

Πχ 1

Έστω ότι $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda + 2)^4$

τότε $\lambda_1 = 1$ με $m_1 = 2$

$\lambda_2 = -3$ με $m_2 = 1$

$\lambda_3 = -2$ με $m_3 = 4$

Παίρνουμε τόσες συναρτήσεις πάντα, όσο είναι είναι και η πολλαπλότητα

$e^{2x} < x^0, x^1$, $e^{-3x} - x^0$, $e^{-2x} < x^0, x^1, x^2, x^3$

Άρα, ΒΣΛ είναι (βάσει του Θεωρ 1) το:

$$\{e^{2x}, xe^{2x}, e^{-3x}, e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, x^3 \cdot e^{-2x}\}$$

Πχ 2

(E_0) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$ με λύσεις μορφής $e^{\lambda x}$.

ΛΥΣΗ

Προκύπτει το Χαρ πολυώνυμο

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$

Άρα ΒΣΛ της (E_0) $\{e^{-x}, e^{2x}, e^{3x}\}$

Το προαναφερθέν θεώρημα ισχύει και στο σύνολο των μιγαδικών

Πχ

$y'' + y = 0$, εάν έχει λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$\lambda^2 + 1 = 0$ είναι το χαρ. πολ.
$\lambda = \pm i$

$y_1(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (1)
$y_2(x) = e^{-ix} = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x)$ (2)

με $\{y_1, y_2\}$ ΘΣΛ της εξίσωσης

Οι (1) και (2) προκύπτουν από τις σχέσεις που πάντα ισχύουν:

$$e^{xbi} = \cos(bx) + i \sin(bx)$$
$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω (E_0): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, $a_i \in \mathbb{R}$
i) Αν y: λύση της (E_0) τότε οι συναρτήσεις $\operatorname{Re} y(x)$ και $\operatorname{Im} y(x)$ είναι επίσης λύσεις

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$L(y)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$L(\operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$L(\operatorname{Re} y)(x) + i\, L(\operatorname{Im} y)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
$L(\operatorname{Re} y)(x) = 0$ & $L(\operatorname{Im} y)(x) = 0$
Άρα, $\operatorname{Re} y(x)$ και $\operatorname{Im} y(x)$ λύσεις της (E_0)

ii) κάθε λύση y με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας είναι y λύση με $y(x_0) \ldots y^{(n-1)}(x_0) \in \mathbb{R}$

τότε $y(x) = (Re\,y)(x) + (Im\,y)(x)$, $x \in \mathbb{R}$

αρκεί νδο $(Im\,y)(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $(Im\,y)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (E_0) με $(Im\,y)(x_0) = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (Im\,y)'(x) = 0 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (Im\,y)^{(n-1)}(x_0) = 0$

άρα η $Im\,y$ ικανοποιεί την ομογενή Δ.Ε n τάξης (E_0) με τετριμμένες αρχικές συνθήκες άρα από Θεώρημα Ύπαρξης μοναδικότητας

$(Im\,y)(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) Αν $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ΒΣΛ με πραγματικές συναρτήσεις τότε y: πραγματική λύση αν.ν $\exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$:

$y = c_1 y_1 + \ldots + y_n \cdot c_n$.

iv) Αν $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \lambda_r = \sigma_r + i\tau_i$

$\lambda_k, \tau_k \in \mathbb{R}$, $\tau_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$

μιγαδικές ρίζες του $p(\lambda)$ με πολλ/τες $m_1, \ldots, m_r$ αντιστοίχως και $\lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_s$ πραγματικές ρίζες του $p(\lambda)$ με πολλ/τες $m_{2r+1}, \ldots, m_s$ τότε οι πραγμ. συναρτήσεις:

$x^{\delta} \cdot e^{\sigma_k x} \cdot \cos \tau_k x$, $k = 1, \ldots, r$, $j = 0, \ldots, m_k - 1$

$x^{\delta} \cdot e^{\sigma_k x} \cdot \sin \tau_k x$

$x^{\delta} \cdot e^{\lambda_k x}$, $k = 2r+1, \ldots, S$, $j = 0, \ldots, m_s - 1$

αποτελούν ΒΣΛ της (E_0)

Εφαρμογή: Έστω ότι προκύπτει το Χ.Π.

$p(\lambda) = (\lambda + 1 - i)^2 \cdot (\lambda + 3i)^3 \cdot (\lambda + 2)^2 \cdot (\lambda - (1 - i))^2 \cdot (\lambda - 3i)^3$

ρίζες: $\lambda_1 = -1 + i$, $m_1 = 2$ | $\lambda_3 = -1 - i$, $m_3 = 2$

$\lambda_2 = -3i$, $m_2 = 3$ | $\lambda_4 = 3i$, $m_4 = 3$

x^0

x^1 $e^{-x} \cdot \cos x$, $x \cdot e^{-x} \cos x$

x^0

x^1 $e^{-x} \cdot \sin x$, $x e^{-x} \sin x$

x^0

x^1 $\cos 3x$, $x \cos 3y$, $x^2 \cos 3x$, e^{-2x}, $x e^{-2x}$,

x^2 $\sin 3x$, $x \sin 3x$, $x^2 \sin 8x$